Γραμμικη Αλγεβρα II

Ασκησεις - Φυλλαδιο 5

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

11 - 5 - 2012

Άσκηση 1. *Έστω η απεικόνιση* $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = 5x_1x_2 - 2(x_1y_2 + y_1x_2) + y_1y_2$$

(1) *Δείξτε ότι η παραπάνω απεικόνιση ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον* $\mathbb{R}^2$.

(2) *Βρείτε τα μήκη των διανυσμάτων* $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(-1, 2)$ *ως προς το παραπάνω το εσωτερικό γινόμενο.*

Λύση. *Έστω* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Τότε έχουμε:*

$$\begin{aligned}\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle &= 5x_1x_2 - 2(x_1y_2 + y_1x_2) + y_1y_2\\ &= 5x_2x_1 - 2(x_2y_1 + y_2x_1) + y_2y_1\\ &= \langle (x_2, y_2), (x_1, y_1)\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle (x_1, y_1) + (x_2, y_2), (x_3, y_3)\rangle &= \langle (x_1 + x_2, y_1 + y_2), (x_3, y_3)\rangle\\ &= 5(x_1 + x_2)x_3 - 2((x_1 + x_2)y_3 + (y_1 + y_2)x_3) + (y_1 + y_2)y_3\\ &= 5x_1x_3 + 5x_2x_3 - 2x_1y_3 - 2x_2y_3 - 2y_1x_3 - 2y_2x_3 + y_1y_3 + y_2y_3\\ &= 5x_1x_3 - 2(x_1y_3 + y_1x_3) + y_1y_3 + 5x_2x_3 - 2(x_2y_3 + y_2x_3) + y_2y_3\\ &= \langle (x_1, y_1), (x_3, y_3)\rangle + \langle (x_2, y_2), (x_3, y_3)\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \lambda(x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle &= \langle (\lambda x_1, \lambda y_1), (x_2, y_2)\rangle\\ &= 5\lambda x_1x_2 - 2(\lambda x_1y_2 + \lambda y_1x_2) + \lambda y_1y_2\\ &= \lambda(5x_1x_2 - 2(x_1y_2 + y_1x_2) + y_1y_2)\\ &= \lambda\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle\end{aligned}$$

$$\langle (x_1, y_1), (x_1, y_1)\rangle = 5x_1^2 - 2(x_1y_1 + y_1x_1) + y_1^2 = 5x_1^2 - 4x_1y_1 + y_1^2 = x_1^2 + (2x_1 - y_1)^2 \geq 0$$

και $\langle (x_1, y_1), (x_1, y_1)\rangle = 0$ *αν και μόνο αν* $x_1 = 0$ *και* $2x_1 - y_1 = 0$, *δηλαδή* $y_1 = 0$. *Άρα η απεικόνιση* $\langle\ ,\ \rangle$ *ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον* $\mathbb{R}^2$. *Τα μήκη των διανυσμάτων* $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(-1, 2)$ *ως προς το παραπάνω το εσωτερικό γινόμενο είναι*

$$\|(1, 0)\| = \sqrt{\langle (1, 0), (1, 0)\rangle} = \sqrt{5 \cdot 1 \cdot 1 - 2(1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) + 0} = \sqrt{5}$$

$$\|(0,1)\| = \sqrt{\big\langle (0,1),(0,1)\big\rangle} = \cdots = 1$$

$$\|(1,3)\| = \sqrt{\big\langle (1,3),(1,3)\big\rangle} = \cdots = \sqrt{2}$$

$$\|(-1,2)\| = \sqrt{\big\langle (-1,2),(-1,2)\big\rangle} = \cdots = \sqrt{17} \qquad \square$$

Άσκηση 2. *Έστω* $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1 = (1,1),\ \vec{\varepsilon}_2 = (1,-1)\}$ *μια βάση του* $\mathbb{R}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathbb{R}^2$. *Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση* $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο επί του* $\mathbb{R}^2$ *έτσι ώστε:*

$$\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_1\rangle = \langle \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_2\rangle = 1, \qquad \langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\rangle = 0$$

Να υπολογισθούν οι αριθμοί $\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle$, *όπου* $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Λύση. *Έστω* $(x_i,y_i) \in \mathbb{R}^2$. *Τότε το διάνυσμα* $(x_i,y_i) = m(1,1) + n(1,-1)$ *αφού το σύνολο* $\mathcal{B}$ *αποτελεί μια βάση του* $\mathbb{R}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathbb{R}^2$. *Έχουμε:*

$$(x_i,y_i) = m(1,1) + n(1,-1) = (m+n, m-n) \implies \begin{cases} x_i = m+n \\ y_i = m-n \end{cases} \implies \begin{cases} m = \frac{x_i+y_i}{2} \\ \\ n = \frac{x_i-y_i}{2} \end{cases}$$

και άρα $(x_i,y_i) = \frac{x_i+y_i}{2}\vec{\varepsilon}_1 + \frac{x_i-y_i}{2}\vec{\varepsilon}_2$. *Τότε:*

$$\begin{aligned}
\big\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\big\rangle &= \Big\langle \frac{x_1+y_1}{2}\vec{\varepsilon}_1 + \frac{x_1-y_1}{2}\vec{\varepsilon}_2, \frac{x_2+y_2}{2}\vec{\varepsilon}_1 + \frac{x_2-y_2}{2}\vec{\varepsilon}_2\Big\rangle \\
&= \Big\langle \frac{x_1+y_1}{2}\vec{\varepsilon}_1, \frac{x_2+y_2}{2}\vec{\varepsilon}_1\Big\rangle + \Big\langle \frac{x_1+y_1}{2}\vec{\varepsilon}_1, \frac{x_2-y_2}{2}\vec{\varepsilon}_2\Big\rangle \\
&+ \Big\langle \frac{x_1-y_1}{2}\vec{\varepsilon}_2, \frac{x_2+y_2}{2}\vec{\varepsilon}_1\Big\rangle + \Big\langle \frac{x_1-y_1}{2}\vec{\varepsilon}_2, \frac{x_2-y_2}{2}\vec{\varepsilon}_2\Big\rangle \\
&= \frac{x_1+y_1}{2}\cdot\frac{x_2+y_2}{2}\big\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_1\big\rangle + \frac{x_1+y_1}{2}\cdot\frac{x_2-y_2}{2}\big\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\big\rangle \\
&+ \frac{x_1-y_1}{2}\cdot\frac{x_2+y_2}{2}\big\langle \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_1\big\rangle + \frac{x_1-y_1}{2}\cdot\frac{x_2-y_2}{2}\big\langle \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_2\big\rangle \\
&= \frac{x_1+y_1}{2}\cdot\frac{x_2+y_2}{2}\cdot 1 + \frac{x_1+y_1}{2}\cdot\frac{x_2-y_2}{2}\cdot 0 \\
&+ \frac{x_1-y_1}{2}\cdot\frac{x_2+y_2}{2}\cdot 0 + \frac{x_1-y_1}{2}\cdot\frac{x_2-y_2}{2}\cdot 1 \\
&= \frac{x_1+y_1}{2}\cdot\frac{x_2+y_2}{2} + \frac{x_1-y_1}{2}\cdot\frac{x_2-y_2}{2} \\
&= \frac{2x_1x_2+2y_1y_2}{4} \\
&= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{2}
\end{aligned}$$

Επομένως δείξαμε ότι: $\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{2}$ *για κάθε* $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$. $\square$

Άσκηση 3. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}_2[t]$ με εσωτερικό γινόμενο*

$$\langle P(t), Q(t)\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt, \qquad \forall P(t), Q(t) \in \mathbb{R}_2[t]$$

και τα πολυώνυμα $P(t) = 1$, $\;Q(t) = t - \frac{1}{2}$, $\;W(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$. Να υπολογίσετε τα μήκη

$$\|P(t)\|, \quad \|Q(t)\|, \quad \|W(t)\|$$

Λύση. *Έχουμε:*

$$\|P(t)\| = \|1\| = \sqrt{\langle 1, 1\rangle} = \sqrt{\int_0^1 1dt} = 1$$

$$\|Q(t)\| = \|t - \frac{1}{2}\| = \sqrt{\langle t - \frac{1}{2}, t - \frac{1}{2}\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2\,dt} = \sqrt{\int_0^1 t^2\,dt - \int_0^1 t\,dt + \frac{1}{4}\int_0^1 1\,dt}$$

$$= \cdots = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$\|W(t)\| = \|t^2 - t + \frac{1}{6}\| = \sqrt{\langle t^2 - t + \frac{1}{6}, t^2 - t + \frac{1}{6}\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2\,dt} = \cdots = \frac{1}{\sqrt{180}} \qquad \square$$

Άσκηση 4. *Να υπολογισθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{x} = (1, 0, 1)$, $\;\vec{y} = (-1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ ως προς το συνήθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$. Ακολούθως να βρείτε όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ τα οποία είναι κάθετα στα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$.*

Λύση. *Έχουμε:*

$$\cos\phi = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||} = \frac{\langle (1, 0, 1), (-1, 1, 0)\rangle}{||(1, 0, 1)|| \cdot ||(-1, 1, 0)||} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

Άρα η γωνία των διανυσμάτων $\vec{x} = (1, 0, 1)$ και $\vec{y} = (-1, 1, 0)$ είναι

$$\phi = \frac{2\pi}{3}$$

Έστω $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Τότε:

$$\left\{\begin{array}{l} \langle (1, 0, 1), (x, y, z)\rangle = 0 \\ \\ \langle (-1, 1, 0), (x, y, z)\rangle = 0 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x + z = 0 \\ \\ -x + y = 0 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = -z \\ \\ y = -z \end{array}\right.$$

Συνεπώς τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ τα οποία είναι κάθετα στα διανύσματα $\vec{x} = (1, 0, 1)$ και $\vec{y} = (-1, 1, 0)$ είναι: $\;z(-1, -1, 1)$ *με* $z \in \mathbb{R}$. $\qquad\square$

Άσκηση 5. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_m\}$ ένα ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{E}$. Να δείξετε ότι*

$$\langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_1\rangle^2 + \cdots + \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_m\rangle^2 \;\; \leq \;\; \|\vec{y}\|^2, \;\; \forall\, \vec{y} \in E$$

Λύση. *Έχουμε:*

$$\begin{aligned}
0 &\le \Big\langle \vec{y} - \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \vec{\varepsilon}_i, \vec{y} - \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \vec{\varepsilon}_i \Big\rangle = \\
&= \big\langle \vec{y}, \vec{y} \big\rangle - \big\langle \vec{y}, \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \vec{\varepsilon}_i \big\rangle \\
&- \big\langle \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \vec{\varepsilon}_i, \vec{y} \big\rangle + \big\langle \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \vec{\varepsilon}_i, \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \vec{\varepsilon}_i \big\rangle \\
&= \big\langle \vec{y}, \vec{y} \big\rangle - \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \big\langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i \big\rangle - \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \big\langle \vec{\varepsilon}_i, \vec{y} \big\rangle \\
&+ \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \big\langle \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_i \big\rangle \\
&= \|\vec{y}\|^2 - 2\sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle^2 + \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle^2 \\
&= \|\vec{y}\|^2 - \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle^2
\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε: $\sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle^2 \le \|\vec{y}\|^2$. □

Άσκηση 6. *Έστω η απεικόνιση* $\langle\ ,\ \rangle' : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle' = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$$

(1) *Δείξτε ότι η παραπάνω απεικόνιση ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον* $\mathbb{R}^3$.
(2) *Να βρεθούν όλα τα διανύσματα του* $\mathbb{R}^3$ *τα οποία είναι κάθετα, ως προς το εσωτερικό γινόμενο* $\langle\ ,\ \rangle'$, *με κάθε διάνυσμα του υπόχωρου*

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$$

Λύση. (1) *Έστω* $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Τότε:*

(α):

$$\begin{aligned}
\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle' &= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 \\
&= y_1x_1 + 2y_2x_2 + 3y_3x_3 \\
&= \langle (y_1, y_2, y_3), (x_1, x_2, x_3)\rangle'
\end{aligned}$$

(β):

$$\begin{aligned}
\langle (x_1, x_2, x_3) + (z_1, z_2, z_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle' &= \langle (x_1 + z_1, x_2 + z_2, x_3 + z_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle' \\
&= (x_1 + z_1)y_1 + 2(x_2 + z_2)y_2 + 3(x_3 + z_3)y_3 \\
&= x_1y_1 + z_1y_1 + 2x_2y_2 + 2z_2y_2 + 3x_3y_3 + 3z_3y_3 \\
&= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + z_1y_1 + 2z_2y_2 + 3z_3y_3 \\
&= \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle' + \langle (z_1, z_2, z_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle'
\end{aligned}$$

(γ):

$$\begin{aligned}\langle\lambda(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle' &= \langle(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle'\\ &= \lambda x_1y_1+2\lambda x_2y_2+3\lambda x_3y_3\\ &= \lambda(x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3)\\ &= \lambda\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle'\end{aligned}$$

(δ): $\langle(x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\rangle' = x_1^2+2x_2^2+3x_3^2 \geq 0$ *και* $\langle(x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\rangle' = 0$ *αν και μόνο αν* $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Επομένως η απεικόνιση $\langle\ ,\rangle'$ *ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον* $\mathbb{R}^3$.

(2) *Έχουμε:*

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \{(x,y,z)\mid x-y+z=0\}\\ &= \{(x,y,z)\mid y=x+z\}\\ &= \{(x,x+z,z)\mid x,z\in\mathbb{R}\}\\ &= \{x(1,1,0)+z(0,1,1)\mid x,z\in\mathbb{R}\}\\ &= \langle(1,1,0),(0,1,1)\rangle\end{aligned}$$

και επειδή τα διανύσματα $(1,1,0),(0,1,1)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα έπεται ότι το σύνολο* $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ *αποτελεί μια βάση του* $\mathcal{V}$. *Αφού θέλουμε να βρούμε όλα τα διανύσματα του* $\mathbb{R}^3$ *τα οποία είναι κάθετα, ως προς το εσωτερικό γινόμενο* $\langle\ ,\rangle'$, *με κάθε διάνυσμα του υπόχωρου* $\mathcal{V}$, *αρκεί να βρούμε τα διανύσματα που είναι κάθετα με τα διανύσματα της βάσης του* $\mathcal{V}$. *Έστω* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. *Τότε:*

$$\begin{cases}\langle(1,1,0),(x,y,z)\rangle'=0\\[2ex] \langle(0,1,1),(x,y,z)\rangle'=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x+2y=0\\[2ex] 2y+3z=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=-2y\\[2ex] z=-\frac{2}{3}y\end{cases}$$

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\langle(1,1,0),(x,y,z)\rangle'=0\ \text{ και }\ \langle(0,1,1),(x,y,z)\rangle'=0\}\\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x=-2y\ \text{ και }\ z=-\frac{2}{3}y\}\\ &= \{(-2y,y,-\frac{2}{3}y)\in\mathbb{R}^3\mid y\in\mathbb{R}\}\\ &= \{y(-2,1,-\frac{2}{3})\in\mathbb{R}^3\mid y\in\mathbb{R}\}\\ &= \langle(-2,1,-\frac{2}{3})\rangle\quad\square\end{aligned}$$